

Equation différentielle 2^{ème} ordre

- Homogène (sans second membre)

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0 \text{ avec } a, b, c = \text{cte}$$

Solutions : polynome caractéristique: $aX^2 + bX + c = 0$ racines: $r_{1,2} = \frac{-b \pm \Delta^{\frac{1}{2}}}{2a}$ discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$: alors l'équation caractéristique admet 2 racines réelles r_1 et r_2

la solution est de la forme: $y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

- si $\Delta = 0$: alors l'équation caractéristique admet 1 racine réelle r

la solution est de la forme: $y = (At + B)e^{rt}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

- si $\Delta < 0$: alors l'équation caractéristique admet 2 racines complexes r_1 et r_2 telles que $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$

la solution est
de la forme:

différentes écritures
pour une même solution

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

$$y = [A' \cos \omega t + B' \sin \omega t] e^{rt}$$

$$y = A'' \cos(\omega t + \phi) e^{rt}$$

avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

avec A' et B' des constantes définies par les conditions initiales

avec A'' et ϕ des constantes définies par les conditions initiales

■ $\Delta > 0$: $y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

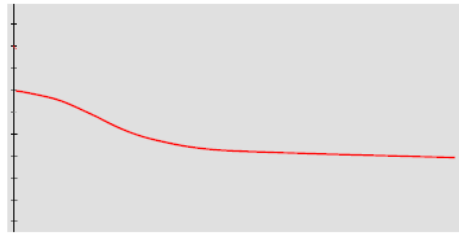
Exemple :

b) Amortissement fort $\lambda^2 > \omega_0^2$ $\Delta > 0$

Nous avons $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

avec $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$

soit $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm \omega$ avec $\omega = (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$



Les solutions sont alors $x(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t})$

Mouvement apériodique

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$a = 1, b = 2\lambda, c = \omega_0^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

$$r_1 = -\lambda + \omega$$

$$r_2 = -\lambda - \omega$$

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

$$y = e^{-\lambda t} (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})$$

■ $\Delta < 0$: $y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

Exemple :

a) Amortissement faible $\lambda^2 < \omega_0^2$ $\Delta < 0$

Nous avons $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

avec $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$

On rappelle que $i^2 = -1$

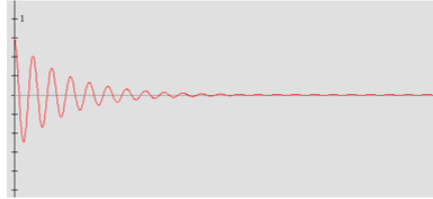
d'où $\lambda^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2 (\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2 \omega^2$ avec $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$

Il existe donc deux valeurs pour γ : $\gamma_1 = -\lambda + i\omega$ et $\gamma_2 = -\lambda - i\omega$

La solution générale est la somme des solutions particulières

soit $x(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$

ou encore $x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$a = 1, b = 2\lambda, c = \omega_0^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

$$r_1 = r + i\omega = -\lambda + i\omega$$

$$r_2 = r - i\omega = -\lambda - i\omega$$

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

$$y = e^{-\lambda t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$$

$$y = A'' \cos(\omega t + \phi) e^{-\lambda t}$$

■ $\Delta = 0$: $y = (At + B)e^{rt}$ avec A et B des constantes définies par les conditions initiales

Exemple :

c) Amortissement critique $\lambda^2 = \omega_0^2$ $\Delta = 0$

Dans ce cas particulier $\Delta=0$, et les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t}$$



Amortissement critique: retour à la position d'équilibre le plus rapidement possible sans aucune oscillation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$a = 1, b = 2\lambda, c = \omega_0^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = -\lambda$$

$$y = (At + B)e^{rt}$$

$$\text{soit } y = (At + B)e^{-\lambda t}$$

Equation différentielle du 2^{ème} ordre

- Avec second membre

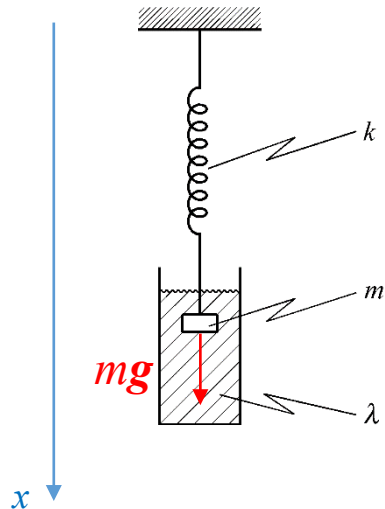
$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = d \text{ avec } a, b, c, d = cte$$

Solution : $y = y_p + y_g$

solution particulière

solution générale de l'équation différentielle sans second membre

Exemple : oscillateur amorti avec force de gravitation



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = g$$

Amortissement faible

$$y = e^{-\lambda t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) + y_p$$

$$y(t \rightarrow \infty) = y_p = \frac{mg}{k}$$

finalement : $y = e^{-\lambda t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) + \frac{mg}{k}$